

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6)$$

Свойства спектральной плотности:

1. если случайная функция содержит постоянную составляющую, то в кривой спектральной плотности в точке  $\omega = 0$  имеется дельта-функция (практически - острый импульс).
2. если случайная функция содержит периодическую составляющую частоты  $\omega_0$ , то в составе кривой  $S_x(\omega)$  имеются две дельта функции в точках  $\pm \omega_0$ .

Пример:

В качестве примера возьмем так называемый чисто случайный процесс, или "белый шум". В нем значения  $x$ , взятые в различные моменты времени  $t_1, t_2, K$ , совершенно независимы друг от друга, как бы близко эти моменты времени друг к другу не были взяты. Это означает, что кривая белого шума содержит всплески, затухающие за бесконечно малые промежутки времени. Для белого шума одномерная плотность вероятности полностью характеризует случайный процесс. Корреляционная функция белого шума  $R_x(\tau) = 0$  при  $\tau \neq 0$  и  $R_x(0) = \bar{x}$  при  $\tau = 0$ , т.е. является  $\delta$ -функцией.

Спектральная плотность белого шума равна интегралу от  $\delta$ -функции, т.е. единице. Таким образом, энергия белого шума распределена по спектру частот равномерно, и её сумма равна бесконечности, что указывает на физическую нереализуемость идеального белого шума (он напоминает случайный процесс колебательного характера с бесконечно большими частотами колебаний).

### Прохождение стационарных случайных сигналов через линейную САУ

Рассмотрим линейную САУ под воздействием случайной функции  $x_1(t)$ . Если воздействие  $x_1(t)$  является стационарным случайным процессом, то  $x_2(t)$  в обыкновенной линейной САУ будет также стационарным случайным процессом.

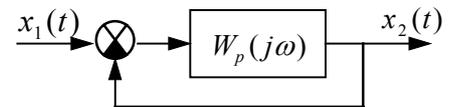


Рис.130

$$W(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} - \text{частотная характеристика замкнутой системы,}$$

$$X_{1T}(j\omega) \rightarrow \boxed{W(j\omega)} \rightarrow X_{2T}(j\omega) \quad W(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{2T}(j\omega)}{X_{1T}(j\omega)}, \quad (1)$$

где  $X_{1T}(j\omega), X_{2T}(j\omega)$  – преобразование Фурье, соответственно от входного и выходного сигнала, где

$$X_{1T}(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{при } -T \leq t \leq T; \\ 0, & \text{при } |t| > T; \end{cases}$$

$$X_{2T}(t) = \begin{cases} x_2(t), & \text{при } -T \leq t \leq T; \\ 0, & \text{при } |t| > T. \end{cases}$$

Выражение (1) не является строгой математической формулой, однако она дает хорошие результаты при практическом её применении.

Если известно входное воздействие  $x_1(t)$ , то известна его спектральная плотность  $S_1(\omega)$ . Тогда можно найти спектральную плотность выходного сигнала  $S_2(\omega)$ .

По определению

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{2T}(-j\omega) X_{2T}(j\omega). \quad (2)$$

$$\text{Умножая и деля выражение (2) на } S_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}(-j\omega) X_{1T}(j\omega), \quad (2')$$

получим

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega). \quad (3)$$

Таким образом спектральная плотность выходной величины равна произведению спектральной плотности входной величины на квадрат модуля частотной характеристики САУ.

По спектральной плотности  $S_2(\omega)$  определяется среднее значение квадрата выходной величины

$$\left[ \overline{x_2(t)} \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_2(\omega) d\omega \quad (4)$$

или, учитывая (3), получим

$$\left[ \overline{x_2(t)} \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_1(\omega) d\omega. \quad (5)$$

С другой стороны, для взаимной спектральной плотности входной и выходной величин линейной системы можно по определению записать

$$S_{12}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}(-j\omega) X_{1T}(j\omega). \quad (6)$$

Умножим и разделим (6) на  $X_{1T}(j\omega)$ , получим

$$S_{12}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{2T}(j\omega)}{X_{1T}(j\omega)} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{1T}(-j\omega) X_{1T}(j\omega) \quad (7)$$

или учитывая (1) и (2')

$$S_{12}(j\omega) = S_1(\omega) W(j\omega). \quad (8)$$

Выражение (8) показывает, что взаимная спектральная плотность входной и выходной величин системы АУ равна спектральной плотности входной величины, умноженной на частотную характеристику системы.

По выражению (8) можно определить частотную характеристику системы  $W(j\omega)$ , находящейся под воздействием случайной величины. Это же выражение (8) позволяет определить связь между взаимной корреляционной функцией входа и выхода и выходной корреляционной функцией

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} h'(t) e^{-j\omega t} dt,$$

где  $h'(t)$  – производная временной характеристики системы.

$$\text{Тогда } R_{12}(\tau) = \int_0^{\infty} h'(t) R_1(\tau - t) dt.$$

### СТАТИСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОШИБКИ В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

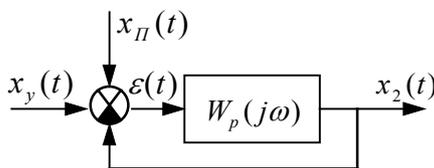


Рис.131

$x_y(t)$  – случайный сигнал управления.

$x_П(t)$  – случайная помеха.

Система АУ будет работать качественно, если сигнал на выходе её  $x_2(t)$  будет точно совпадать, с определенным коэффициентом пропорциональности, с сигналом управления  $x_y(t)$ , т.е.  $x_2(t) \equiv x_y(t)$ .

Показателем качества системы, как обычно является её ошибка

$$\varepsilon(t) = x_y(t) + x_П(t) - x_2(t). \quad (1)$$

Очевидно, что чем меньше  $\varepsilon(t)$ , тем лучше система.

В статистических расчетах обычно определяют не саму ошибку, а либо величину среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon_{CK}(t) = \sqrt{\overline{\varepsilon^2(t)}}, \quad (2)$$

либо однозначно с ней связанную величину среднего значения квадрата ошибки  $\overline{\varepsilon^2(t)}$ .

$$\text{Из выражения (4)} \quad \left[ \overline{x_2(t)} \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_2(\omega) d\omega \quad (2')$$

следует, что для определения  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  необходимо знать величину соответствующей спектральной плотности  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\varepsilon(\omega) d\omega$

$$S_\varepsilon(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E_T(-j\omega) E_T(j\omega), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E_T(j\omega) &= \int_{-T}^{+T} \varepsilon(t) e^{-j\omega t} dt, \\ E_T(-j\omega) &= \int_{-T}^{+T} \varepsilon(t) e^{j\omega t} dt. \end{aligned} \right\} \text{усеченное изображение Фурье от функции } \varepsilon(t) \quad (4)$$

Переходя в (1) к изображениям по Фурье, получим при  $x_{II}(t) = 0$ ,  $x_y(t) = x_1(t)$ .

$$\left. \begin{aligned} E_T(j\omega) &= X_{yT}(j\omega) - X_{2T}(j\omega), \\ E_T(-j\omega) &= X_{yT}(-j\omega) - X_{2T}(-j\omega). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Учитывая (5) и (4) от выражения (3) можно перейти

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [X_{yT}(-j\omega) - X_{2T}(-j\omega)] [X_{yT}(j\omega) - X_{2T}(j\omega)] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ |X_{yT}(j\omega)|^2 + |X_{2T}(j\omega)|^2 - X_{yT}(-j\omega) X_{2T}(j\omega) - X_{2T}(-j\omega) X_{yT}(j\omega) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{yT}(j\omega)|^2 &= S_y(\omega), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_{2T}(j\omega)|^2 &= S_2(\omega), \quad \notin S_2(\omega) = S_1(\omega) |W_K(j\omega)|^2, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{yT}(-j\omega) X_{2T}(j\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{2T}(j\omega)}{X_{1T}(j\omega)} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{yT}(-j\omega) X_{1T}(j\omega) = S_{y1}(j\omega) W_K(j\omega), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{2T}(-j\omega) X_{1T}(j\omega) &= S_{1y}(j\omega) W_K(-j\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$S_\varepsilon(\omega) = S_y(\omega) + S_1(\omega) |W_K(j\omega)|^2 - S_{y1}(j\omega) W_K(j\omega) - S_{1y}(j\omega) W_K(-j\omega). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (2'), получим среднее значение квадрата ошибки

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\varepsilon(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [S_y(\omega) + S_1(\omega) |W_K(j\omega)|^2 - S_{y1}(j\omega) W_K(j\omega) - S_{1y}(j\omega) W_K(-j\omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Если случайные сигналы на входе  $x_y(t)$  и  $x_{II}(t)$  являются независимыми, тогда их взаимная спектральная плотность равна 0.

Для этого случая можно записать

$$\left. \begin{aligned} S_{y1}(j\omega) &= S_y(\omega) = S_{y1}(-j\omega), \\ S_1(\omega) &= S_y(\omega) + S_{II}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Учитывая (10) в (9), получим

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 + |W_3(j\omega)|^2 - W_3(j\omega) - W_3(-j\omega) \right] S_y(\omega) + |W_3(j\omega)|^2 S_{\Pi}(\omega) \right\} d\omega \quad (11)$$

или окончательно после преобразований можно записать

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ |1 - W_3(j\omega)|^2 S_y(\omega) + |W_3(j\omega)|^2 S_{\Pi}(\omega) \right\} d\omega. \quad (12)$$

Учитывая, что  $W_3(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}$ , получим

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left| \frac{1}{1 + W_p(j\omega)} \right|^2 S_y(\omega) + \left| \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} \right|^2 S_{\Pi}(\omega) \right\} d\omega. \quad (13)$$

Уравнение (13) показывает, что несмотря на то, что сигналы управления и помехи воздействуют на систему в одном и том же месте, их влияние на величину динамической ошибки системы различно.

Если сигналы управления и помехи приложены в разных местах системы, то среднее значение квадрата ошибки можно определить по такой формуле:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ |W_{13}(j\omega)|^2 S_y(\omega) + |W_{23}(j\omega)|^2 S_{\Pi}(\omega) \right\} d\omega, \quad (14)$$

где  $W_{13}(j\omega), W_{23}(j\omega)$  – частотные функции замкнутой системы, которые определяются соответственно для сигналов управления и помехи в зависимости от места их приложения.

### **Синтез систем с оптимальными параметрами, обеспечивающих минимальную среднеквадратичную ошибку**

Задача состоит в том, чтобы найти такие параметры системы (либо ввести корректирующие устройства), при которых среднее значение квадрата ошибки будет минимально. Такая система будет оптимальна по ошибке.

Выражение (9)  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ S_y(\omega) + S_1(\omega) |W_3(j\omega)|^2 - S_{y1}(j\omega) W_3(j\omega) - S_{1y}(j\omega) W_3(-j\omega) \right] d\omega$

для среднего значения квадрата ошибки можно представить в общем виде таким образом

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = f(a_1, a_2, a_3, K, \dots), \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, a_3, K$  – параметры системы.

Для того, чтобы  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \min$ , необходимо решить систему

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, a_3, K, \dots)}{\partial(a_i)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, K). \quad (2)$$

Определим оптимальную частотную характеристику, для чего к правой части выражения (9) вычтем и добавим следующее выражение

$$\frac{|S_{1y}(j\omega)|^2}{S_1(\omega)}. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ S_y(\omega) + \left[ |W_3(j\omega)|^2 - W_3(j\omega) \frac{S_{y1}(j\omega)}{S_1(\omega)} - W_3(-j\omega) \frac{S_{1y}(j\omega)}{S_1(\omega)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|S_{1y}(j\omega)|^2}{S_1^2(\omega)} \right] S_1(\omega) - \frac{|S_{1y}(j\omega)|^2}{S_1(\omega)} \right\} d\omega \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ S_y(\omega) + \left| W_z(j\omega) - \frac{S_{1y}(j\omega)}{S_1(\omega)} \right|^2 S_1(\omega) - \frac{|S_{1y}(j\omega)|^2}{S_1(\omega)} \right\} d\omega. \quad (5)$$

Среднее значение квадрата ошибки будет минимально  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \min$ , если

$$\left| W_z(j\omega) - \frac{S_{1y}(j\omega)}{S_1(\omega)} \right|^2 = 0. \quad (6)$$

Условие (6) вытекает из того, что величина многочлена в квадратных скобках существенно положительна и только он может измениться при изменении параметров системы.

Из (6) определим оптимальную передаточную функцию замкнутой системы.

$$W_{z.opt.}(j\omega) = \frac{S_{1y}(j\omega)}{S_1(\omega)}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получим

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ S_y(\omega) - \frac{|S_{1y}(j\omega)|^2}{S_1(\omega)} \right\} d\omega. \quad (8)$$

Отметим, что в большинстве случаев передаточная функция (7) оказывается практически нереализуемой. В этих случаях систему проектируют так, чтобы передаточная функция замкнутой системы была близкой к  $W_{z.opt.}(j\omega)$  и технически реализуемой.

# НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Нелинейным элементом (звеном)* называется устройство, у которого статические характеристики в рабочем диапазоне существенно нелинейны.

*Нелинейной системой* называется такая система, в которой присутствует хотя бы одно нелинейное звено.

Структурная схема, состоящая из одного нелинейного звена и линейной части может быть представлена схемой

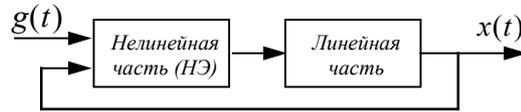


Рис.132

К такой структуре приводятся все системы с одним нелинейным элементом (НЭ) и произвольной линейной частью (ЛЧ) по правилам преобразования структур линейных звеньев.

Существенные нелинейности, с которыми приходится иметь дело на практике, можно разделить на однозначные и неоднозначные.

Нелинейный элемент, статическая характеристика которого, между входной и выходной величинами имеет однозначную зависимость как при увеличении, так и при уменьшении входного сигнала, называется НЭ с *однозначной нелинейной характеристикой*.

Если статическая характеристика элемента при увеличении входа изменяется по одной зависимости, а при уменьшении входа – по другой, то такой НЭ называют с *неоднозначной нелинейной характеристикой*.

Таблица типовых нелинейных характеристик

Таблица 3

<i>Однозначные характеристики</i>	<i>Неоднозначные характеристики</i>
<p>1. Нечувствительность.</p>	<p>1. Зазор.</p>
<p>2. Ограничение (насыщение).</p>	<p>2. Релейная с гистерезисом.</p>
<p>3. Релейная идеальная.</p>	<p>3. Релейная с нечувствительностью и гистерезисом.</p>
<p>4. Релейная с зоной нечувствительности.</p>	

## **Математическое описание нелинейных систем. Особенности процессов в нелинейных системах.**

Математическое описание нелинейных САУ обычно имеет вид нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно представить в двух формах:

1.

$$F_1\left(\frac{d^n x}{dt^n}; \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}; K, x\right) = F_2\left(\frac{d^m g}{dt^m}; \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}}; K, g, f\right), \quad (1)$$

где  $x(t)$  – регулируемая координата,

$g(t)$  – задающий сигнал,

$f(t)$  – внешнее возмущение,

$F_1, F_2$  – нелинейные функции своих переменных.

Если нелинейная система исследуется при постоянных управляющем и возмущающем воздействиях, т.е.  $g(t) = const$ ,  $f(t) = const$ , то уравнение (1) получает более простой вид

$$F_1\left(\frac{d^n x}{dt^n}; \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}; K, x\right) = F_2(g, f), \quad (2)$$

в котором решение состоит из переходной и постоянной составляющей, причем постоянная составляющая зависит только от правой части, а переходная составляющая определяется из решения нелинейной функции в левой части (2).

2.

$$\frac{dx_K}{dt} = X_K[x_1, x_2, x_3, K, x_n, g(t), f(t), t], \quad (3)$$

где  $x_1, x_2, x_3, K, x_n$  ( $i = 1, 2, K, n$ ) – обобщенные координаты системы,

$X_K$  – нелинейные функции.

Система уравнений (3) представляет собой систему нелинейных уравнений 1-го порядка, где в качестве независимых переменных функции  $X_K$  служат сами координаты, а не их производные.

Отметим, что для реальных систем не всегда можно получить ту или иную форму в виде (1), (3). В таких случаях можно использовать их комбинацию.

### Особенности процессов в нелинейных системах

Таблица 4

<i>Линейные системы</i>	<i>Нелинейные системы</i>
1. Принцип суперпозиции справедлив.	1. Принцип суперпозиции несправедлив.
2. Возможно только одно состояние равновесия. Причем устойчивое состояние равновесия всегда устойчиво асимптотически.	2. Возможно несколько (больше 1) состояний равновесия. Одновременно в системе могут быть как устойчивые, так и неустойчивые состояния равновесия.
3. Особые движения, в частности, режим автоколебаний не возможен.	3. При постоянстве задающих и возмущающих воздействий возможны особые движения, т.е. переходная составляющая, не возрастающая и незатухающая во времени. Если это особое движение – периодическое, то оно называется автоколебаниями.

## Общая характеристика методов исследования нелинейных систем

Существующие в настоящее время методы исследования нелинейных САУ можно разделить на три группы:

1. Точные аналитические методы,
2. Приближенные графические методы,
3. Моделирование на аналоговых и цифровых ВМ.

### 1. Точные аналитические методы.

- 1.1. Метод фазового пространства.
- 1.2. Метод исследования абсолютной устойчивости.
- 1.3. Прямой метод А.М.Ляпунова.
- 1.4. Метод сечения пространства параметров.
- 1.5. Метод разделения движения на быстрые и медленные.

### 2. Приближенные методы.

- 1.1. Метод гармонической линеаризации.
- 1.2. Графоаналитические методы построения переходных процессов.

### 3. Методы моделирования.

- 1.1. Аналоговое моделирование для непрерывных систем.
- 1.2. Цифровое моделирование для дискретных систем.

## Метод фазовой плоскости

Метод изображения ПП в фазовом пространстве и фазовой плоскости был введен в ТАУ академиком А.А.Андроновым. Этот метод позволяет получить наглядную и точную картину всех интересующих ПП при любых начальных условиях для нелинейных систем второго порядка (плоскость). Некоторые нелинейные задачи 3-го порядка также решены методом фазового пространства. А для систем 2-го порядка он развит до инженерных расчетов.

*Фазовой плоскостью* называется плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо переменные, характеризующие ПП в системе. Наиболее часто принимают:  $x$  – выходная координата,  $y = \frac{dx}{dt}$  – скорость изменения выходной координаты. Тогда уравнение 2-го порядка удобно свести к двум уравнениям 1-го порядка.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $x, y$  – обобщенные фазовые координаты,

$Q_1, Q_2$  – в общем случае нелинейные функции переменных  $x$  и  $y$ , хотя бы один раз дифференцируемые по своим переменным.

Чтобы от (1) перейти к уравнениям фазовых траекторий, необходимо из (1) исключить время ( $t$ ). Для этого разделим второе уравнение (1) на первое

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x, y)}{Q_1(x, y)}. \quad (2)$$

Решением уравнения (2) будет некоторая функция

$$y = F(x), \quad (3)$$

графическое изображение которой на фазовой плоскости называется фазовой траекторией.

### Отметим свойства фазовых траекторий

1. Если для уравнения (2) выдерживаются условия существования и единственности решения, то фазовые траектории при изменении начальных условий нигде не пересекаются (за исключением ограниченного числа изолированных особых точек).
2. В тех случаях, когда

$$\left. \begin{aligned} Q_1(x, y) &= 0, \\ Q_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решая (4) на фазовой плоскости получим координаты особых точек. Так как из (1)  $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ , то движение в особых точках прекращается – т.е. эти точки соответствуют равновесию (установившемуся состоянию) системы.

3. Если на фазовой плоскости находится замкнутая траектория, то эта траектория также называется особой или предельным циклом.
4. Если за координаты фазовой плоскости принимается координата  $x$  и  $y = \frac{dx}{dt}$ , то система (1) получает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

следовательно, при  $y > 0$  (верхняя полуплоскость)  $x$  всегда возрастает при росте  $t$  (движение слева-направо). При  $y < 0$  (нижняя полуплоскость) при росте  $t$   $x$ -убывает (движение справа-налево).

### **Порядок исследования методом фазовой плоскости**

1. Определяются все возможные состояния равновесия.
2. Найденные состояния равновесия исследуются на устойчивость в малой окрестности по уравнениям 1-го приближения.
3. Строится фазовый портрет в целом при любых начальных условиях и определяется наличие замкнутых траекторий – предельных циклов.
4. Если предельные циклы в исследуемой системе присутствуют, то исследуется их устойчивость.

Рассмотрим более подробно каждый из названных пунктов:

1. Как уже говорилось, состояния равновесия – это особые точки фазовой плоскости, которые определяются из решения алгебраической системы

$$\left. \begin{aligned} Q_1(x, y) &= 0, \\ Q_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Пусть решения (4) будут  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  (рис.133).

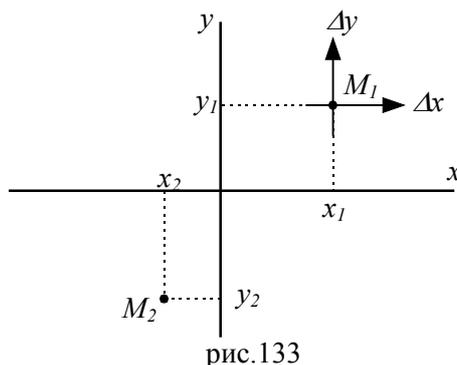


рис.133

2. В найденных точках состояний равновесия производится линеаризация исходной системы (1) при малых отклонениях переменных от состояний равновесия.

Рассмотрим, например, состояние равновесия в точке  $M_1(x_1, y_1)$  при малых отклонениях  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . После линеаризации (ряд Тейлора) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q_1(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \Delta x + \left. \frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \Delta y + K, \\ \frac{dy}{dt} &= Q_2(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial Q_2(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \Delta x + \left. \frac{\partial Q_2(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \Delta y + K. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Последнюю систему уравнений (6) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Переход от (6) к (7) соответствует переносу начала координат в исследуемую точку  $M_1$  состояния равновесия (рис.133).

Система уравнений (7) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений, решения которой нам хорошо известны – они определяются корнями характеристического уравнения.

Корни, как известно, могут быть:

1. Действительными
  - 1.1. Положительными;
  - 1.2. Отрицательными;
  - 1.3. Один положительный, а другой отрицательный.
2. Комплексными.
  - 2.1. С положительной вещественной частью;
  - 2.2. С отрицательной вещественной частью.
3. Мнимыми.

Согласно этой классификации корней произведем и классификацию типов особых точек.

- 1.1. Особая точка типа "неустойчивый узел" – корни действительные положительные (рис.134).

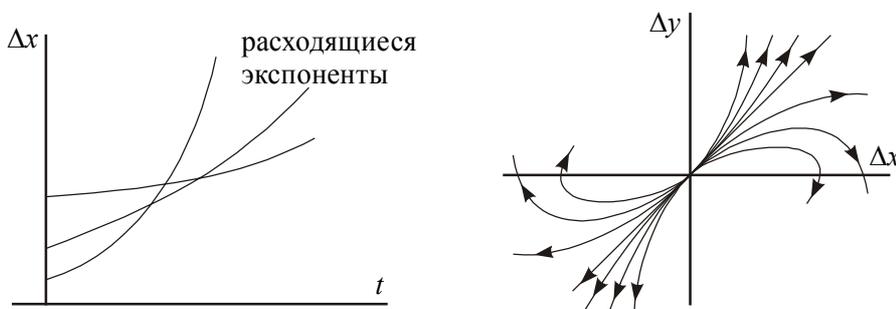


рис.134

- 1.2. Особая точка типа "устойчивый узел" – корни действительные отрицательные (рис.135).

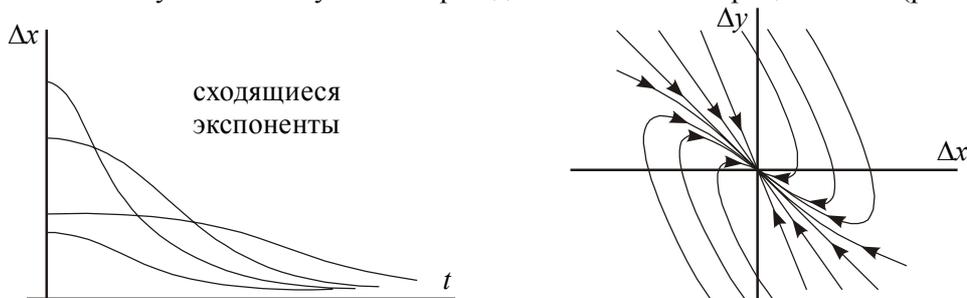


рис.135

1.3. Особая точка типа "седло" – корни действительные – один положительный, другой отрицательный (рис.136).

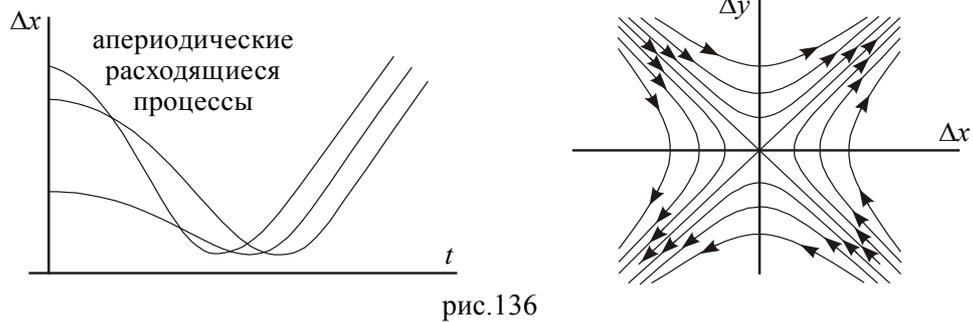


рис.136

2.1. Особая точка типа "неустойчивый фокус" – корни комплексные с положительной вещественной частью (рис.137).

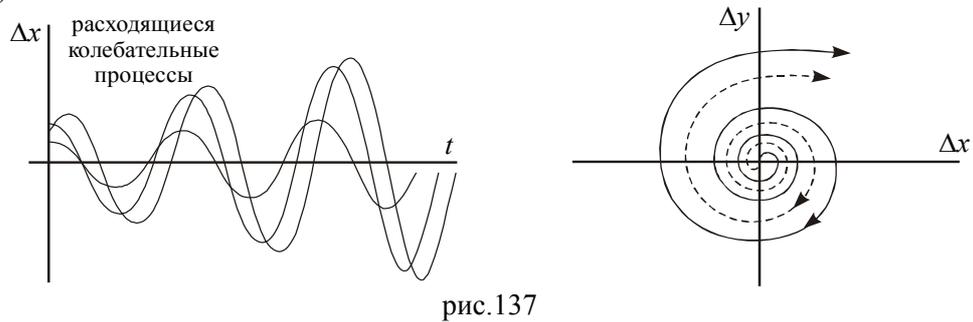


рис.137

2.2. Особая точка типа "устойчивый фокус" – корни комплексные с отрицательной вещественной частью (рис.138).

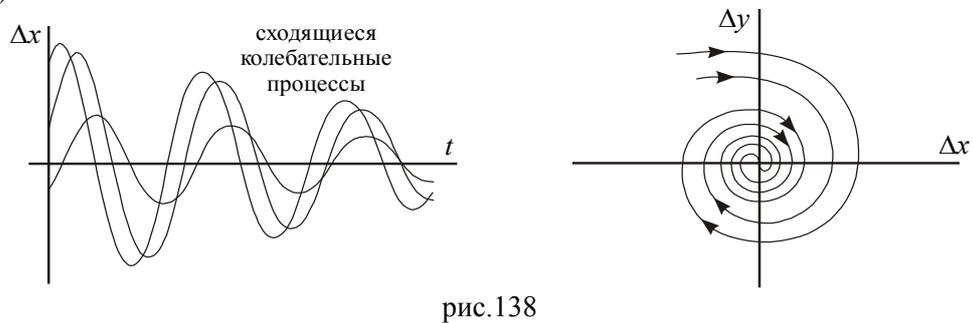


рис.138

3. Особая точка типа "центр" – корни мнимые (рис.139).

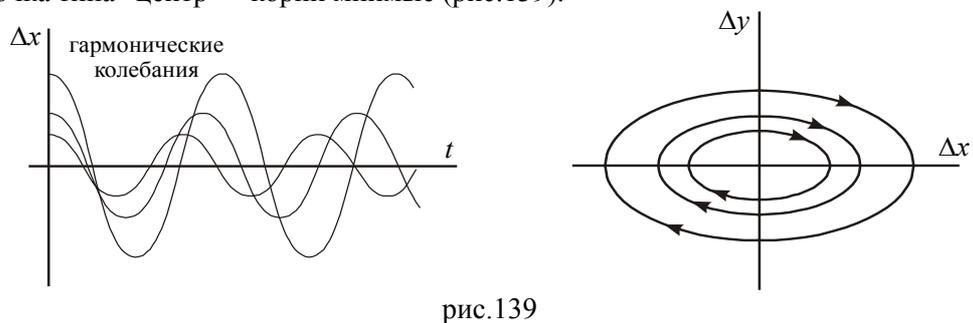


рис.139

**3. Построение фазового портрета при любых начальных условиях.**

Уравнение фазовой траектории, как мы уже имели, получает такой вид (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x, y)}{Q_1(x, y)} \quad (2)$$

Если есть возможность решить уравнение (2), то тем самым находим семейство интегральных кривых при любых заданных начальных условиях. Совокупность этих кривых на фазовой плоскости дает полную картину динамического поведения САУ – фазовый портрет САУ.

Однако, следует отметить, что уравнение (2) нелинейное и в большинстве случаев его аналитическое решение затруднено. Поэтому для решения уравнения (2) развит приближенный графоаналитический метод – метод изоклин.

### Построение фазового портрета методом изоклин

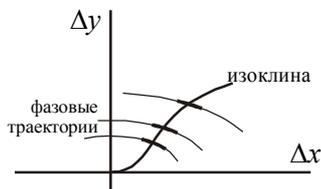


Рис. 140

Изоклинами называют геометрические места точек, в которых наклон касательных ко всем фазовым траекториям одинаков (рис.140).

Полагая  $\frac{dy}{dx} = const = I$ , получим уравнение изоклины

$$\frac{Q_2(x, y)}{Q_1(x, y)} = I. \quad (8)$$

Фазовая траектория, как это следует из определения изоклины, пересекает изоклину под углом, равным  $\arctg I$ . Поэтому, задаваясь  $I_1, I_2, I_3, K$ , в фазовой плоскости можно построить семейство изоклин, причем на каждую изоклину наносят риски с определенным наклоном равным  $\arctg I_i$  ( $i = 1, 2, 3, K$ ).

Порядок построения фазовой траектории:

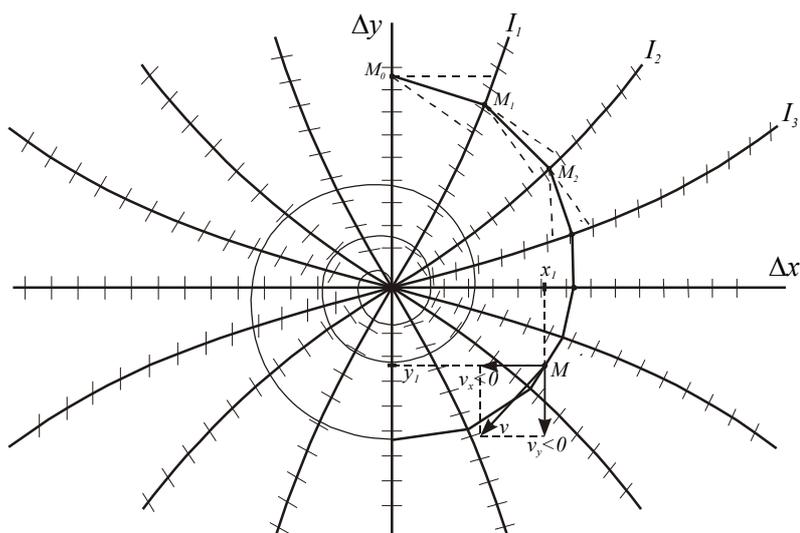


Рис. 141

Из точки  $M_0$  (начальных условий) проводится два луча: один параллелен углу наклона фазовой траектории к изоклине, откуда начинается движение, другой параллелен углу наклона фазовой траектории к последующей изоклине. Из угла, образованного этими лучами проводится биссектриса до пересечения со следующей изоклиной (точки  $M_1$ ) и т.д.

После построения фазовой траектории, необходимо определить направление движения по ней при возрастании  $t$ . Для этого в точках, где необходимо определить направление движения, например в  $M(x_1, y_1)$ , определяются проекции скорости

$$\left. \begin{aligned} V_x &= Q_1(x_1, y_1) = \frac{dx}{dt}, \\ V_y &= Q_2(x_1, y_1) = \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если для точки  $M(x_1, y_1)$   $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_1, y=y_1} < 0, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x_1, y=y_1} < 0$ , то проекции скоростей  $v_x$  и  $v_y$  будут иметь

направление как на графике и тогда движение по траектории будет направлено к началу координат.

В результате построения фазового портрета нелинейной системы могут быть получены траектории, которые называются особыми.

Особыми траекториями называют такие фазовые траектории, которые разделяют плоскость на различные качественные процессы или траектории. К ним относятся:

1. сепаратрисы;
2. предельные циклы.

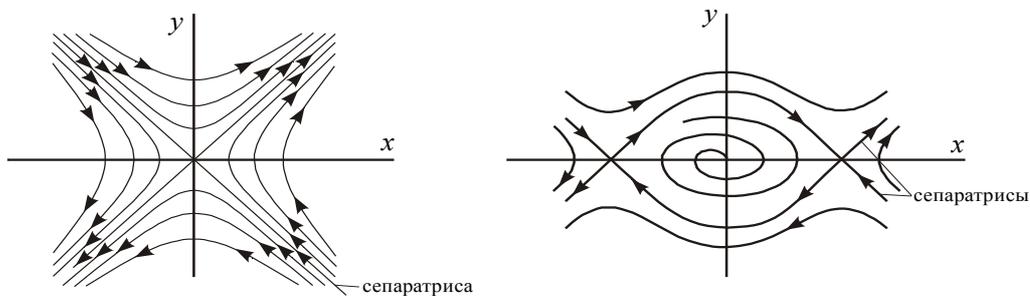


Рис. 142

### Классификация предельных циклов с точки зрения устойчивости

Замкнутая фазовая траектория называется предельным циклом. Предельные циклы могут быть (рис.143):

1. устойчивыми
2. неустойчивыми
3. полуустойчивыми

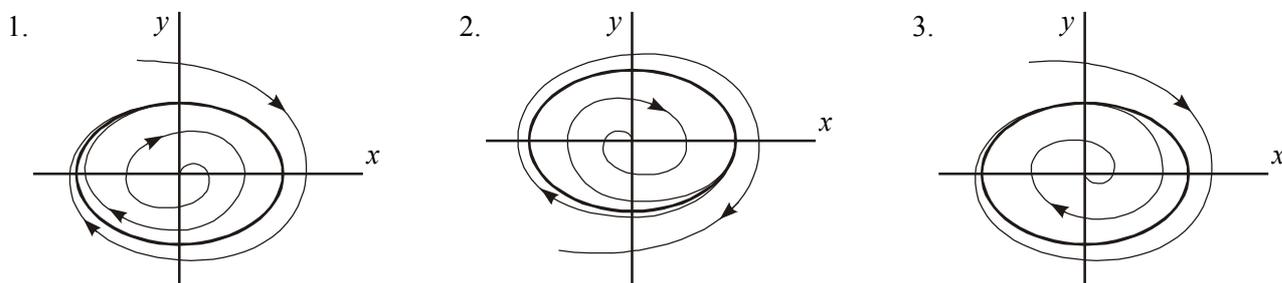


Рис.143

Предельный цикл будет устойчивым, если внутренняя и наружная траектории будут асимптотически к нему приближаться (наматываться) (рис.143(1)).

Предельный цикл будет неустойчив, когда траектории внутренняя и наружная удаляются от него. Такая система устойчива при малых отклонениях и неустойчива при больших (рис.143(2)).

Предельный цикл будет полуустойчив, если траектории наружные к нему приближаются, а внутренние удаляются. Такой предельный цикл в реальной системе существовать не может (рис.143(3)).

### Построение фазового портрета для нелинейной системы с кусочно-линейными звеньями

#### Метод припасовывания

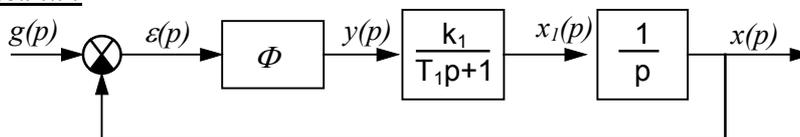


рис. 144

$\Phi$  - нелинейное звено, которое для определенности имеет вид трехпозиционного поляризованного реле с зоной нечувствительности без гистерезиса (рис.145).

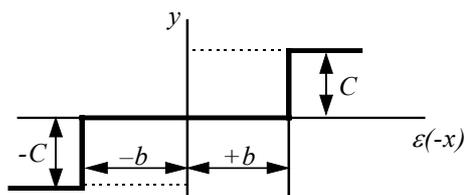


рис. 145

$b$  – зона нечувствительности реле.

Как уже говорилось, фазовый портрет системы – это семейство фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям (воздействиям). Поэтому можно принять  $g(t) = 0$ . Тогда ошибка

$$\varepsilon = g(t) - x = -x, \varepsilon = -x. \quad (1)$$

Таким образом, при положительном  $x$  (например  $x > b$ ) сигнал на выходе нелинейности будет  $-C$ , и наоборот, при отрицательном  $x$  (например  $-x > -b$ ) на выходе нелинейности будем иметь сигнал  $+C$ .

Составим уравнения, описывающие поведение данной системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= k_1 y, \\ y &= \Phi(-x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если за координаты фазовой плоскости принять выходную величину  $x$  и скорость изменения выходной величины  $\frac{dx}{dt} = x_1$ , то в соответствии с видом нелинейности вся фазовая плоскость разбивается на три области.

I. Когда  $|x| < b$  и  $y = 0$ , следовательно уравнения системы (2) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{T_1} x_1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

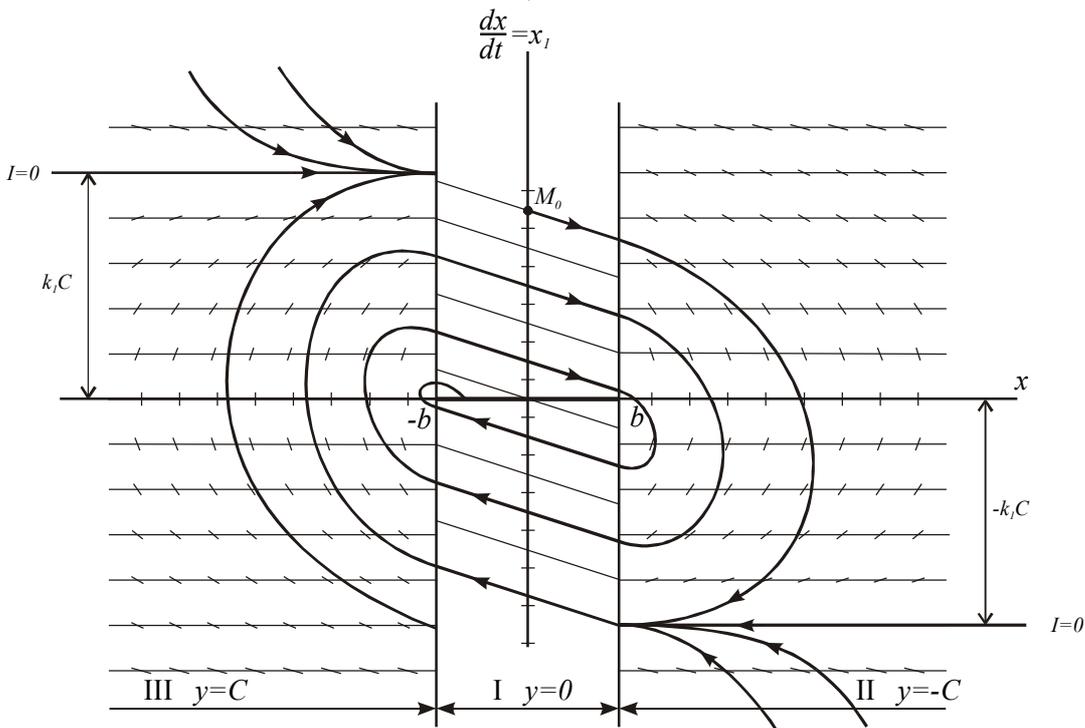


Рис.146

Из системы (3) найдем уравнение фазовой траектории (для чего второе уравнение (3) разделим на первое)

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{1}{T_1}. \quad (4)$$

Решая (4)

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\frac{1}{T_1} dx, \\ x_1 &= -\frac{1}{T_1} x + A, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A$  – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

Уравнения (5) являются фазовыми траекториями в области  $I, |x| < b$  – это прямые линии, параллельные друг другу и имеющие отрицательный угол наклона, равный  $-\frac{1}{T_1}$ .

Отрезок  $|x| < b, x_1 = 0$  называется отрезком покоя.

II. При  $|x| \geq b, y = \pm C$

Область II при  $x \geq b \quad y = -C$

Область III при  $x \leq -b \quad y = +C$

Линии  $x = \pm b$  на фазовой плоскости называются линиями переключения (на них припасовываются решения, соответствующие разным областям).

Уравнение системы (2) для этих областей принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= \pm \frac{k_1 C}{T_1} - \frac{1}{T_1} x_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решая (6) аналогично предыдущему, получим

$$\frac{dx_1}{dx} = \pm \frac{k_1 C}{T_1 x_1} - \frac{1}{T_1}. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение фазовой траектории в области II с ”–” у первого слагаемого правой части и в области III с ”+”.

Интегрирование (аналитическое решение) уравнения (7) затруднительно, поэтому найдем уравнение изоклин

$$\frac{dx_1}{dx} = I = const \quad \text{или из (7)}$$

$$\begin{aligned} I &= \pm \frac{k_1 C}{T_1 x_1} - \frac{1}{T_1}, & I + \frac{1}{T_1} &= \pm \frac{k_1 C}{T_1 x_1}, \\ x_1 &= \pm \frac{k_1 C}{1 + T_1 I}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) есть уравнение изоклин. Задаваясь значениями  $I_i = const$  получим из (8) прямые линии параллельные оси абсцисс.

$I$	0	$\pm 1,0$	...	$\pm \infty$
$x_1$	$\pm k_1 C$	$\pm \frac{k_1 C}{1 + T_1}$	...	0
$arctg I$	$0^\circ$	$45^\circ, 135^\circ$	...	$90^\circ$

Причем, как это видно из таблицы, каждому значению  $I$ , соответствует свой угол наклона фазовой траектории. Изоклины и соответствующие углы наклонов фазовых траекторий на них,

наносятся на фазовую плоскость. После этого, по определенным величинам начальных условий (при  $t = 0, x = x_0, x_1 = x'_0$ ) строится фазовая траектория или семейство фазовых траекторий.

По фазовому портрету отметим следующее:

1. На фазовой плоскости всегда видно отображение нелинейности.
2. Фазовый портрет релейной системы состоит из нескольких зон, соответствующих различному состоянию реле (включено, выключено) такая фазовая плоскость называется *многолистной*.
3. Для построения фазовых траекторий методом припасовывания на границе нелинейности (линиях переключения) принимаются конечные значения координат  $(x_1, x)$  предыдущей области в качестве начальных для следующей области, т.е. припасовываются (приравняются) конечные и начальные условия.
4. Полученный фазовый портрет дает полное описание динамических свойств системы.

Мы уже говорили, что в нелинейных системах могут возникать особые движения – предельные циклы (устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые). При определении этих режимов и их параметров часто используется метод точечных отображений (преобразований), разработанный академиком А.А.Андроновым и его учениками (1956÷58).

Сущность этого метода состоит в следующем:

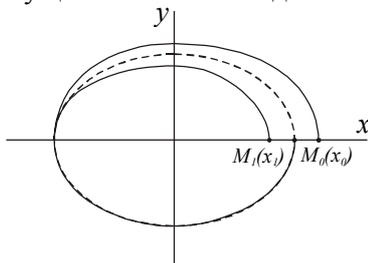


Рис.147

Зададимся начальным значением  $M_0$  на положительной оси  $x$  с абсциссой  $x_0$ . Допустим, через некоторый промежуток времени изображающая точка, двигаясь по фазовой траектории, уравнение которой известно, снова пересекает положительную полуось  $x$  в точке  $M_1$  с абсциссой  $x_1$ . Причем значение координаты  $x_1$  может быть выражено через  $x_0$  определенной функциональной зависимостью через уравнение фазовой траектории; т.е.

$$x_1 = f(x_0), \quad (1)$$

функция  $f(x_0)$  называется функцией последования.

По виду функции последования (1) можно судить о динамическом поведении системы, а именно если:

1.  $x_1 < x_0$  – процесс является затухающим;
2.  $x_1 > x_0$  – процесс является расходящимся;
3.  $x_1 = x_0$  – в системе имеется предельный цикл (автоколебания).

Построим график  $x_1 = f(x_0)$  (рис.148) и биссектрису координатного угла  $x_1 = x_0$  – называемого *диаграммой точечного преобразования* (диаграмма Кенигса-Ламерея):

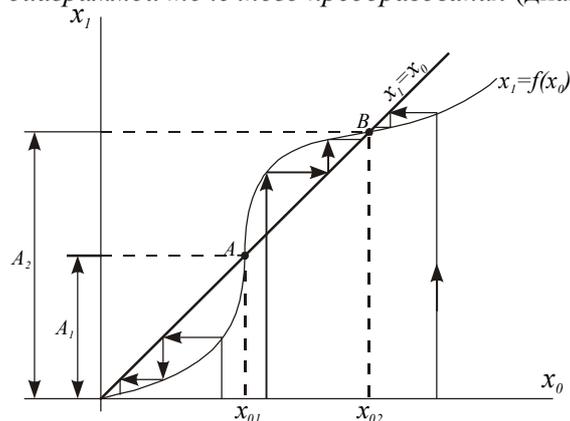


Рис.148

– Затухающим процессам соответствует участок зависимости  $f(x_0)$ , лежащий ниже биссектрисы (левее точки А и правее точки В).

– Расходящимся процессам соответствует участок зависимости  $f(x_0)$ , лежащий выше биссектрисы (между точками А и В).

– Точки пересечения зависимости  $f(x_0)$  с биссектрисой определяет амплитуды возможных незатухающих колебаний в системе  $A_1$  и  $A_2$ .

Устойчивость предельных циклов определяется как показано на рис.148 стрелками. Следовательно, предельный цикл в точке А – неустойчив, а в точке В – устойчив.

Следует отметить, что с помощью точечного преобразования можно исследовать динамику системы, не строя самого фазового портрета. Кроме того, этот метод применяется для определения влияния параметров системы на характер переходных процессов в ней. При этом могут быть определены критические (бифуркационные) значения параметров, переход через которые качественно меняет фазовый портрет системы.

В заключении укажем, что точечное преобразование иногда проще строить для полуоси  $y$ . Если фазовый портрет симметричен относительно одной из координатных осей (пример релейная система), достаточно находить функцию последования для преобразования положительной полуоси в отрицательную.

Если на фазовом портрете есть линии переключения, то обычно вместо координатных полуосей удобнее находить точечное преобразование для этих линий.

### **Построение переходного процесса по фазовой траектории**

В любой точке фазового пространства координаты траектории  $(x, y)$  однозначно связаны со временем.

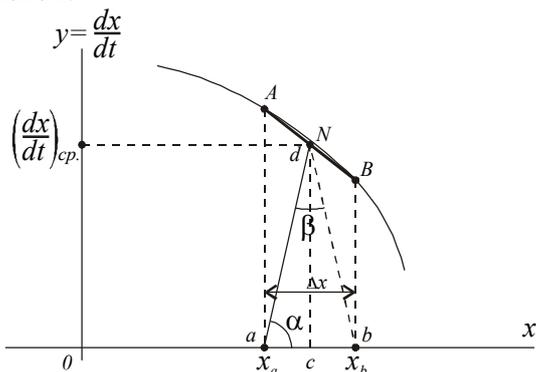


Рис.149

Рассмотрим участок фазовой траектории (рис.149). На некотором участке  $AB$  примем её линейной. Выберем точку  $N$  посередине отрезка  $AB$ . В пределах этого участка можно записать

$$\Delta x = x_b - x_a = \Delta t \left( \frac{dx}{dt} \right)_{cp}, \quad (1)$$

где  $\left( \frac{dx}{dt} \right)_{cp}$  – средняя величина производной  $\frac{dx}{dt}$

на участке  $AB$ .

Рассмотрим треугольник  $acd$

$$ac = dc \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Из равнобедренного треугольника  $abd$ , учитывая (1) от выражения (2) можно перейти

$$\Delta x = 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)_{cp} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad \text{или} \quad \Delta t \left( \frac{dx}{dt} \right)_{cp} = 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)_{cp} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2},$$

$$\Delta t = 2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \quad (3)$$

Угол  $\beta$  можно определить из равнобедренного треугольника  $abd$ .

#### Порядок построения ПП по фазовой траектории:

1. Выбирается постоянный шаг  $\Delta t$  и определяется

$$\text{угол } \beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Delta t}{2}.$$

2. Из точки  $x_0$  (начальные условия) (рис.150)

проводится прямая под углом  $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$  до пересечения с фазовой траекторией в точке  $y_1$ .

3. Из точки  $y_1$  под углом  $\beta$  к проведенной ранее прямой проводится новая прямая до пересечения с осью абсцисс  $x$ . Точка  $x_1$  есть искомое значение  $x(t_1)$  (точка 1).

4. Точка  $x_1$  является исходной для следующего шага и т.д.

5. Поступая аналогично, находят полную картину переходного процесса в системе.

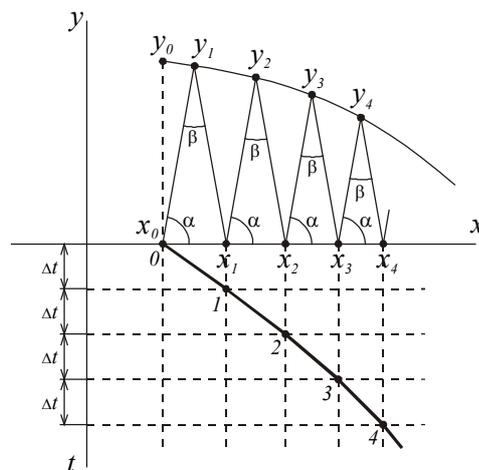


Рис.150

### **Прямой (второй) метод А.М.Ляпунова для исследования нелинейных систем**

Второй метод А.М.Ляпунова (первый нами подробно рассмотрен при изучении линейных САУ), получивший название прямого метода основан на построении специальных функций (функций Ляпунова) по исходным нелинейным дифференциальным уравнениям, описывающих поведение системы.

Пусть исходная система описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{где } (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

$f_k$  – нелинейные функции.

В начале дадим некоторые определения:

– Знакопостоянная функция называется такая функция, которая имеет постоянный знак и обращается в ноль в конечном числе точек заданной области фазового пространства.

Пример: 1.  $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ .

2.  $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2$ .

– Знакоопределенная функция называется функция, которая имеет определенный знак и обращается в ноль только в начале координат.

Пример: 1.  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  – определено-положительная функция.

2.  $V(x_1, x_2, x_3) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  – определено-отрицательная функция.

**Теорема 1.** Если для исследуемой системы можно подобрать такую знакоопределенную функцию  $V(x_K)$ , что её полная производная по времени в силу исходной системы дифференциальных уравнений (1) будет знакопостоянной функцией противоположного с  $V(x_K)$  знака, то исследуемое состояние равновесия будет устойчивым.

Найденная функция  $V(x_K)$  называется функцией А.М.Ляпунова.

Рассмотрим фазовое пространство (в частности 3-мерное).

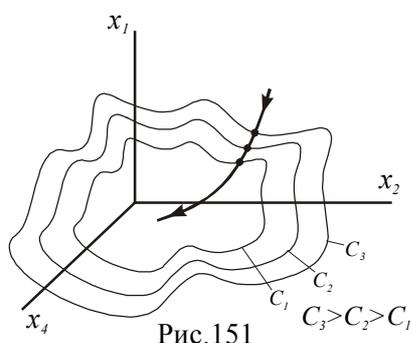


Рис.151

В фазовом пространстве координат  $(x_1, x_1, K, x_n)$  функция  $V(x_K) = C = const$ , которая удовлетворяет требованиям теоремы, изображается в виде замкнутой поверхности, охватывающей точку равновесия  $x_K = 0$  (рис.151).

Если  $C \rightarrow 0$ , то  $V(x_K) \rightarrow 0$ , т.е. при уменьшении  $C$  поверхность ”стягивается в начало координат”.

Если в силу уравнений системы (1)  $V(x_K) \rightarrow 0$  (т.е. величина  $\frac{dV(x_K)}{dt}$  отрицательна), то это означает, что с

течением времени происходит переход от внешних поверхностей к внутренним, т.е. фазовые траектории пронизывают замкнутые поверхности снаружи внутрь, т.е. в конечном итоге стягиваются к точке равновесия. Система в этом случае устойчива

$$\frac{dV(x_K)}{dt} = \sum_{K=1}^n \frac{\partial V(x_K)}{\partial x_K} \cdot \frac{dx_K}{dt} = \sum_{K=1}^n \frac{\partial V(x_K)}{\partial x_K} \cdot f_K(x_1, x_1, K, x_n). \quad (2)$$

**Теорема 2.** Если для исследуемой системы можно подобрать такую знакоопределенную функцию  $V(x_K)$ , что её полная производная по времени в силу исходной системы дифференциальных уравнений (1) будет также знакоопределенной функцией противоположного с  $V(x_K)$  знака, то исследуемое состояние равновесия будет устойчиво асимптотически.

Трудность применения прямого метода Ляпунова состоит в отсутствии общих правил отыскания функций  $V(x_K)$ . Здесь в большей мере приходится рассчитывать на интуитивный подбор, что существенно ограничивает применение данного метода.

Кроме того, прямой метод Ляпунова дает лишь достаточное, но не необходимое условие устойчивости.

Для линейных систем функции Ляпунова представляют собой квадратичные формы координат, коэффициенты которых находятся по определенному разработанному алгоритму.

Для нелинейных систем общей методики построения функций Ляпунова нет. Решены лишь некоторые задачи, которые можно распространить на достаточно широкий класс нелинейных систем.

## Построение V-функций Ляпунова (примеры)

**1. Метод Лурье-Постникова.** В 1944 г. для одного частного вида уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \text{ где } (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

задача об устойчивости была изящно решена А.И.Лурье и В.Н.Постниковым.

Рассмотрим эту задачу: Дана система уравнений описывающая поведение нелинейной САУ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= (\alpha - 1)x_1 + \alpha x_2 - rf(x_3), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – текущие координаты системы,

$\alpha, r$  – постоянные коэффициенты,

$f(x_3)$  – нелинейная зависимость, на которую накладываются следующие ограничения (рис.152):

1. непрерывна и имеет непрерывные производные,
2. однозначна,
3. нечетна, т.е.  $f(x_3) = -f(-x_3)$ ,
4.  $f(x_3) = 0$ , если  $|x_3| \leq \varepsilon$  (зона нечувствительности).

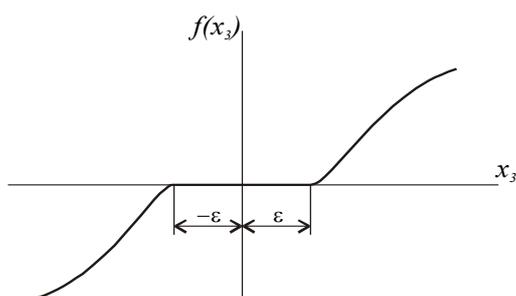


Рис.152

Лурье и Постников предложили для такого класса нелинейных систем V-функцию Ляпунова в виде квадратичной формы координат (для линейной части системы) плюс интеграл от нелинейности

$$V = \frac{\alpha - 1}{2} x_1^2 + \frac{\alpha}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (3)$$

Функция V (3) является определено-положительной, т.к.  $(-x_1)^2, (-x_2)^2$  и  $f(-x_3)d(-x_3) = f(x_3)dx_3$  при любых значениях  $x_i$  все слагаемые положительны.

Возьмем полную производную по времени от (3)

$$\frac{dV}{dt} = (\alpha - 1)x_1 \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_2 \frac{dx_2}{dt} + f(x_3) \frac{dx_3}{dt}. \quad (4)$$

Подставим в (4) соответствующие производные из системы (2).

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (\alpha - 1)x_1 [-x_1 + f(x_3)] + \alpha x_2 [-f(x_3)] + f(x_3)[(\alpha - 1)x_1 + \alpha x_2 - rf(x_3)] = \\ &= -(\alpha - 1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r + 1 - \alpha)[f(x_3)]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Если

$$\left. \begin{aligned} \alpha - 1 &> 0, \\ r + 1 - \alpha &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

то производная  $\frac{dV}{dt}$  из (5) всегда отрицательна, следовательно состояние равновесия системы устойчиво. Если условие (6) не будет выполнено, то об устойчивости состояния равновесия ничего сказать нельзя.

### **Определение абсолютной устойчивости нелинейных систем**

Абсолютная устойчивость – это устойчивость в целом (при любых начальных условиях) нелинейной системы при нелинейности принадлежащей к определенному классу.

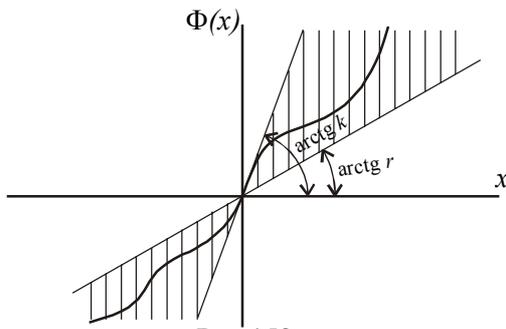


Рис.153

Наиболее разработанными являются методы исследования устойчивости для класса нелинейностей, заключенных между двумя прямолинейными лучами, проходящими через начало координат в I и III квадрантах и имеющих угловые коэффициенты  $r$  и  $k$  (рис.153).

**Гипотеза М.А.Айзермана:** В 1946 г. М.А.Айзерман выдвинул гипотезу о том, что если заменить нелинейный элемент с характеристикой, лежащей внутри угла  $(r, k)$  линейным, и если линеаризованная таким образом система будет

устойчивой, т.е. угол  $(r, k)$  будет Гурвицев (выдерживаются условия алгебраического критерия Гурвица для линейных систем), то исходная нелинейная система будет абсолютно устойчива.

Эта гипотеза справедлива для большого количества задач, структурная схема которых имеет вид (рис.154).  $\Phi(\varepsilon)$  – удовлетворяет выше названным требованиям.

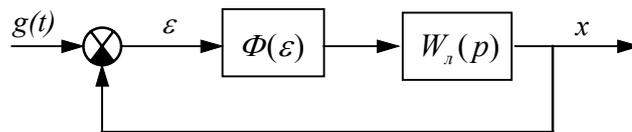


рис. 154

Однако не для всех систем её можно применять, поэтому большой интерес вызывает метод определения абсолютной устойчивости нелинейных систем при помощи частотных характеристик. Этот метод разработан румыном В.М.Поповым (1959 г.).

### Критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова

Принимаем  $g(t) = 0$  (рис.154).

**Определение:** Для того, чтобы положение равновесия нелинейной системы с устойчивой линейной частью  $W_L(j\omega)$  было абсолютно устойчивым, достаточно, чтобы выдерживались следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ (1 + \alpha j\omega) W_L(j\omega) + \frac{1}{k} \right] &> 0; \\ 0 < \frac{\Phi(x)}{x} < k, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $k$  – максимальный угловой коэффициент для сектора нелинейной характеристики.  
 $\alpha$  – некоторое постоянное число.

Считая, что линейная часть системы устойчива, рассмотрим геометрическую интерпретацию критерия, для чего введем частотную характеристику

$$W_L^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega), \quad (2)$$

которая отличается от частотной характеристики линейной части системы  $W_L(j\omega)$  лишь мнимой частью:

$$\left. \begin{aligned} U^*(\omega) &= U(\omega), \\ V^*(\omega) &= \omega V(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Частотная характеристика  $W_L^*(j\omega)$  обладает следующими свойствами:

1. Если в частотной характеристике линейной части системы  $W_L(j\omega)$  порядок полинома числителя не выше порядка полинома знаменателя, то  $W_L^*(j\omega)$  будет всегда лежать в конечной части плоскости. Это означает, что при  $\omega \rightarrow \infty$   $U^*(\omega)$  и  $V^*(\omega)$  стремятся либо к нулю, либо к конечному пределу.

2. Мнимая часть частотной характеристики  $W_{\mathcal{L}}^*(j\omega)$   $V^*(\omega)$  в отличие от  $V(\omega)$  является чётной функцией, следовательно частотная характеристика  $W_{\mathcal{L}}^*(j\omega)$  не будет симметричной относительно вещественной оси.

Рассмотрим первое уравнение системы (1)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[(1 + \alpha j\omega)W_o(j\omega) + \frac{1}{k}\right] &= \operatorname{Re}\left\{(1 + \alpha j\omega)[U(\omega) + jV(\omega)] + \frac{1}{k}\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{U(\omega) - \alpha\omega V(\omega) + j[\alpha\omega U(\omega) + V(\omega)] + \frac{1}{k}\right\} = U(\omega) - \alpha\omega V(\omega) + \frac{1}{k} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая (3) неравенство (4) можно переписать

$$U^*(\omega) - \alpha V^*(\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (5)$$

Граничное (критическое) значение

$$U^*(\omega) - \alpha V^*(\omega) + \frac{1}{k} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) в координатах комплексной плоскости  $U^*, V^*$  дает прямую линию, пересекающую вещественную ось в точке  $(-\frac{1}{k}; j0)$  с коэффициентом наклона  $\frac{1}{\alpha}$  и касается частотной характеристики  $W_{\mathcal{L}}^*(j\omega)$ .

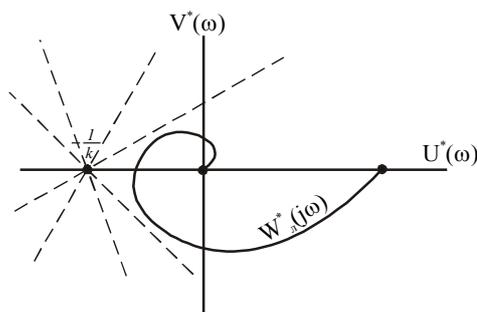


Рис.155

Если выполняется условие (5), то кривая  $W_{\mathcal{L}}^*(j\omega)$  лежит правее прямой (6).

Таким образом критерий Попова может быть еще сформулирован таким образом: *Для абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы с устойчивой линейной частью и нелинейности, характеристика которой лежит в секторе  $(0, k)$ , достаточно, чтобы частотная характеристика Попова  $W_{\mathcal{L}}^*(j\omega)$  целиком лежала справа от прямой, проходящей через точку  $(-\frac{1}{k}; j0)$  с угловым коэффициентом  $\frac{1}{\alpha}$ , где  $\alpha$*

– может принимать произвольное значение.

Пример:

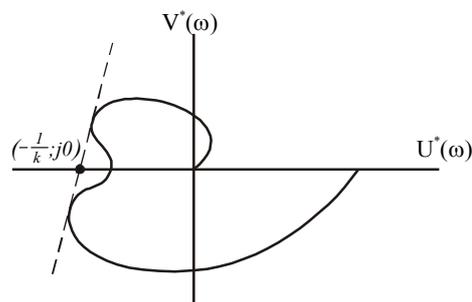


Рис.156

Если, то сделать заключение об устойчивости нельзя, т.к. критерий Попова только достаточный.

Как видно из графика (рис.156) по виду частотной характеристики  $W_{\mathcal{L}}^*(j\omega)$  можно определить критический коэффициент наклона сектора нелинейности  $(0, k)$ .

### **Обобщение критерия Попова на случай нейтральной и неустойчивой линейной части системы**

Линейная часть называется *нейтральной*, если хотя бы один корень характеристического уравнения является нулевым, а все остальные левыми.

*Неустойчивая* линейная часть – если хотя бы один корень правый.

Если линейная часть системы неустойчива (нейтральна), нелинейная характеристика  $\Phi(x)$  не может уже принадлежать сектору  $(0, k)$ , т.к. при  $k = 0$  система размыкается, следовательно, будет неустойчива заведомо. Очевидно, она будет неустойчива и при малых  $k$ .

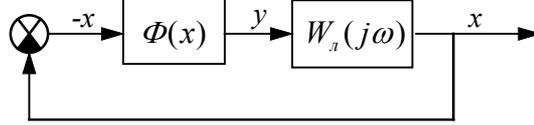


рис. 157

Преобразуем исходную систему (рис.157), охватив нелинейный элемент прямой, а линейную часть обратной отрицательными связями с коэффициентом  $r$  (видоизмененная схема эквивалентна предыдущей, т.к. это видно из рис.158, введенные обратные связи взаимно компенсируются).

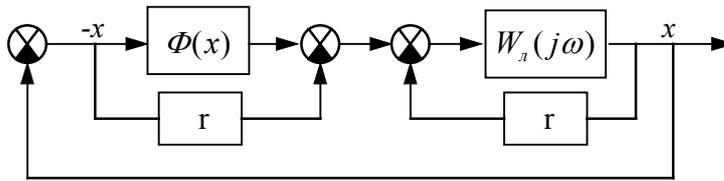


рис. 158

В преобразованной структуре нелинейная часть имеет характеристику

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - rx, \quad (1)$$

линейная часть

$$W_1(j\omega) = \frac{W_n(j\omega)}{1 + rW_n(j\omega)}. \quad (2)$$

Коэффициент  $r$  выбирается таким, чтобы корни уравнения  $[1 + rW_n(j\omega)] = 0$  были левыми, т.е. чтобы видоизмененная линейная часть была устойчива.

Т.к. полученная линейная часть устойчива, то к преобразованной структуре можно применять критерий Попова:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ (1 + \alpha j\omega)W_1(j\omega) + \frac{1}{k_1} \right] &> 0; \\ 0 < \frac{\Phi_1(x)}{x} < k_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $k_1 = k - r$ , согласно соотношения (1).

Второе уравнение (3) с учетом (1) преобразуется к виду

$$0 < \frac{\Phi(x)}{x} - r < k_1$$

или

$$r < \frac{\Phi(x)}{x} < k_1 + r = k, \quad (4)$$

т.е. нелинейная характеристика для абсолютной устойчивости состояния равновесия исходной системы с неустойчивой или нейтральной линейной частью должна принадлежать сектору  $(r; k)$ , где  $r$  – постоянный коэффициент.